

# **Investigando o Cubo Mágico no Desenvolvimento de Conteúdos da Geometria Euclidiana por meio das Perspectivas Sociocultural/Crítica da Modelagem Matemática e da Etnomatemática**

Paulo Victor Clark Lopes  
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)  
E-mail: pvlopes13@gmail.com

Milton Rosa  
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)  
E-mail: milton.rosa@ufop.edu.br

## **Resumo**

O principal objetivo do estudo descrito neste artigo é verificar como a utilização lúdica do Cubo Mágico como um recurso mediador pode auxiliar no desenvolvimento de conteúdos da Geometria Euclidiana referentes aos conteúdos relacionados com a geometria plana e espacial, que envolvem os conceitos intuitivos, a área, o perímetro de figuras planas e o volume de sólidos geométricos para alunos matriculados em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental. Essa temática é relevante, pois pode contribuir para o desenvolvimento de um processo metodológico diferenciado por meio da utilização de materiais manipulativos para o desenvolvimento de conteúdos geométricos. Para os professores, essa ação pedagógica é considerada como um importante recurso pedagógico para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem em Geometria, pois a utilização desses materiais pode possibilitar a assimilação dos conteúdos geométricos pelos alunos. Para a comunidade escolar, essa investigação pode contribuir para o desenvolvimento geométrico dos alunos, pois quando conseguem assimilar os conteúdos estudados na Geometria, relacionando-os com o próprio contexto, os estudantes podem aplicar esses conhecimentos nas atividades realizadas no cotidiano. Então, os resultados obtidos na condução desse estudo podem auxiliar os alunos no entendimento dos conteúdos geométricos e a sua conexão com as vivências diárias por meio da utilização do Cubo Mágico nessa ação pedagógica fundamentada nas perspectivas sociocultural/crítica da Modelagem Matemática e da Etnomatemática.

**Palavras-chave:** Cubo Mágico, Etnomatemática, Geometria Euclidiana, Ludicidade, Modelagem Matemática.

## **Investigating Magic's Cube in the Development of Contents of Euclidean Geometry through the Sociocultural/Critical Perspectives of Mathematical Modelling and Ethnomathematics**

### **Abstract**

The main objective of the study described in this article is to verify how the ludic use of the Magic's Cube as a mediating resource can help in the development of Euclidean Geometry contents referring to contents related to plane and spatial geometry, which involve intuitive concepts such as area, perimeter of flat figures, and volume of geometric solids for students enrolled in a 7<sup>th</sup> grade middle school class. This theme is relevant as it can contribute to the development of a differentiated methodological process through the use of manipulative materials for the development of geometric contents. For teachers, this pedagogical action is considered as an important pedagogical resource for the development of the teaching and learning process in Geometry, as the use of these materials can enable students to assimilate

geometric contents. For the school community, this investigation can contribute to the geometric development of students, because when they are able to assimilate contents studied in Geometry by relating them to their own context, students can apply this knowledge in everyday activities. So, the results obtained in conducting this study can help students to understand the geometric contents and their connection with daily experiences through the use of the Magic's Cube in this pedagogical action based on the sociocultural/critical perspectives of Mathematical Modelling and Ethnomathematics.

**Keywords:** Magic Cube, Ethnomathematics, Euclidean Geometry, Ludicity, Mathematical Modeling.

### **Investigando el Cubo de Magico en el Desarrollo de Contenidos de la Geometría Euclidiana a través de las Perspectivas Sociocultural/Crítica de la Modelación Matemática y de las Etnomatemáticas**

#### **Resumen**

El principal objetivo del estudio descrito en este artículo es comprobar cómo el uso lúdico del Cubo Magico como un recurso mediador puede ayudar en el desarrollo de contenidos de Geometría Euclidiana referidos a contenidos relacionados con la geometría plana y espacial, que involucran conceptos intuitivos de la área, el perímetro de figuras planas y el volumen de sólidos geométricos para estudiantes matriculados en una clase de 7° grado de primaria. Este tema es relevante, ya que puede contribuir al desarrollo de un proceso metodológico diferenciado a través del uso de materiales manipulativos para el desarrollo de contenidos geométricos. Para los docentes, esta acción pedagógica es considerada como un recurso pedagógico importante para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, ya que el uso de estos materiales puede posibilitar que los estudiantes asimilen los contenidos geométricos. Para la comunidad escolar, esta investigación puede contribuir al desarrollo geométrico de los estudiantes, ya que cuando son capaces de asimilar los contenidos estudiados en Geometría, relacionándolos con su propio contexto, los estudiantes pueden aplicar estos conocimientos en las actividades cotidianas. Entonces, los resultados obtenidos en la realización de este estudio pueden ayudar a los estudiantes a comprender los contenidos geométricos y su conexión con las experiencias cotidianas a través del uso del Cubo Magico en esta acción pedagógica que está basada en las perspectivas sociocultural/crítica de la Modelación y de la Etnomatemática.

**Palabras-clave:** Cubo Magico, Etnomatemáticas, Geometría Euclidiana, Ludicidad, Modelación Matemática.

#### **Considerações Iniciais**

De uma maneira pouco sistematizada, pode-se afirmar que a Geometria sempre esteve presente nas atividades e tarefas cotidianas realizadas pela humanidade. Assim, Costa (2013) comenta que:

(...) por meio dos desenhos encontrados nas cavernas e nos artefatos culturais pode-se tomar conhecimento e estudar os costumes bem como verificar o desenvolvimento técnico e intelectual de grupos socioculturais que viverem em uma determinada época da história” (p. 36).

Nesse contexto, Lopes (2021), afirma que a Geometria é um campo de estudo de fundamental importância para o desenvolvimento da humanidade. Por exemplo, no decorrer da história, a evolução da Geometria contribuiu para o desenvolvimento da sociedade por meio de seus conhecimentos tecnológicos e científicos, que coincidem com as necessidades do dia a dia das pessoas, para a divisão de terras, para as construções, para a observação do movimento dos astros e outras atividades que sempre dependeram do seu desenvolvimento.

Por exemplo, Rosa e Orey (2014) estabelecem que, numa perspectiva etnomatemática a “interação da cultura egípcia com o meio-ambiente acontecia por meio da necessidade do desenvolvimento de técnicas aritméticas e geométricas que eram necessárias para a medição das terras ao longo das margens do Rio Nilo” (p. 538). Assim, dos primeiros conceitos geométricos a ser desenvolvido foi a noção de distância.

Dessa maneira, Eves (1997) afirma que as primeiras considerações realizadas a respeito da Geometria são antigas, tendo como origem a simples observação e a capacidade de reconhecer figuras e comparar formas e tamanhos presentes na rotina diária. Similarmente, Eves (1992) argumenta que as primeiras percepções geométricas que a humanidade realizou são muito antigas e, provavelmente, antecedem ao surgimento da escrita.

Essas percepções tiveram origem nas observações acerca do espaço físico, das formas, da comparação de formas e de tamanhos. Nesse contexto, destaca-se que, no início das civilizações, a humanidade somente considerava os problemas geométricos concretos que se:

(...) apresentavam individualmente e entre os quais não era possível nenhuma ligação (...), mais tarde, a inteligência humana tornou-se capaz de, a partir de um certo número das observações relativas a formas, tamanhos e relações espaciais de objetos específicos, extrair certas propriedades gerais e relações que incluíam as observações anteriores particulares (Eves, 1992, p. 2-3).

Por exemplo, Gerdes (1992) expôs que a Geometria Euclidiana surgiu das necessidades da humanidade, pois tem a sua origem como uma ciência empírica ou experimental. Assim, foi por meio da comparação com o seu meio que, na Idade da Pedra, os indivíduos intuíram os primeiros conhecimentos geométricos. Então, existe a necessidade de destacar que:

(...) depois de ter sido reunido suficiente material factual respeitante às formas espaciais mais simples, tornou-se possível, sob condições sociais especiais, como, por exemplo, no Egito antigo, Mesopotâmia e China, sistematizar consideravelmente o material factual recolhido (Gerdes, 1992, p. 17).

Conforme esse contexto, Rosa e Orey (2003) afirmam que os membros de culturas distintas desenvolveram a habilidade de modelar os meios natural e social, de acordo com as

próprias necessidades, para explicar e entender os fenômenos (matema) que ocorrem nesses ambientes.

Historicamente, é importante destacar que, parte do trabalho algébrico e aritmético desenvolvido e elaborado por al-Khwarizmi (790-840) foi baseado na análise da representação geométrica grega dos números e, também, no estudo dos textos que foram anteriormente traduzidos pelos membros de outras culturas (McLeish, 1991).

No entanto, o processo de ensino e aprendizagem em Geometria, que é desencadeado nas escolas, principalmente, no Ensino Fundamental, tem sido relegado a segundo plano e, muitas vezes, os seus conteúdos nem são ensinados para os alunos (Pavanello, 1993).

Contudo, apesar das importantes contribuições da Geometria para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos e do raciocínio lógico dos alunos, Pavanello (1989) afirmava que, frequentemente, o ensino dos conteúdos geométricos têm sido objeto de pouca exploração e, normalmente, é introduzido somente ao final de cada ano letivo.

Em suas investigações posteriores com relação à Geometria, Pavanello (1993) argumentou que os conteúdos desse campo de estudo somente eram ensinados no final do ano escolar, como se fossem considerados pelos professores de Matemática como menos importantes que os demais componentes curriculares matemáticos.

Posteriormente, reforçando essa constatação, Gandro, Nacarato e Gomes (2008) afirmam que o conteúdo geométrico é raramente “trabalhado nas escolas públicas e, quando o é, ocorre ou ao final do ano ou de forma totalmente destituída de sentido e significado para o aluno” (p. 27).

Similarmente, Passos e Nacarato (2014) ressaltam que “embora os conteúdos geométricos estejam presentes ao longo dos livros didáticos, os professores optam, na maioria das vezes, para deixá-los para o final do ano e, com isso, eles não são ensinados, ou são apresentados aos alunos de forma acelerada e reduzida (p. 1148).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), de Matemática, é necessário ressaltar a importância de que os estudos relacionados com o espaço e a forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, como, por exemplo, as obras de arte, de pinturas, de desenhos e de esculturas, visando desenvolver a habilidade de percepção e a visualização dos conceitos geométricos para possibilitar que os alunos possam estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas de conhecimento humano.

Nesse direcionamento, Monteiro (2013) aponta que essas dificuldades podem ser amenizadas e ou/minimizadas quando os professores inovarem suas aulas com práticas

metodológicas que possibilitem aos alunos participarem de modo efetivo e ativo na construção do próprio conhecimento geométrico.

Por conseguinte, Pelli (2014) afirma que a percepção dos objetos geométricos pertencentes ao mundo físico, como, por exemplo, as obras de arte, as pinturas, os desenhos, a escultura e o artesanato, podem gerar conexões entre a Geometria Plana e outras áreas do conhecimento por meio do estabelecimento de diálogos entre campos de estudo distintos.

De modo semelhante, para Filho e Brito (2006), as necessidades cotidianas possibilitam que as pessoas desenvolvam uma inteligência essencialmente prática que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e desenvolver capacidades para lidar com as situações diárias.

Esse contexto evidencia, de acordo com Ferreira (2017), a importância do conhecimento geométrico, haja vista que propicia o desenvolvimento de um *olhar inovador* para a Geometria, para que desse modo os alunos possam visualizar e também construir, desenvolver e aprimorar o conhecimento geométrico.

### **Perspectiva Sociocultural/Crítica da Modelagem Matemática**

O desenvolvimento da sociedade trouxe a necessidade de desenvolver um olhar diferenciado para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática nas escolas. A velocidade com que as informações são difundidas somadas ao crescente avanço tecnológico e a necessidade de profissionais que estejam aptos a trabalharem com essas novas modificações chamam por uma educação matemática que possibilite a formação dos alunos para que possam atuar de uma maneira ativa na sociedade (Rosa, 2010).

Desse modo, é importante que as mudanças desencadeadas no ambiente escolar tenham como objetivo o atendimento às demandas de uma sociedade que está em rápida e constante evolução. Contudo, para que essa evolução possa ocorrer no campo da Educação Matemática, a perspectiva sociocultural da Modelagem Matemática é uma tendência apropriada para ser utilizada como um ambiente de aprendizagem para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos (Rosa & Orey, 2012).

Nesse direcionamento, a Modelagem Matemática como um ambiente de ensino e aprendizagem possibilita aos professores e aos alunos assumirem determinadas responsabilidades e obrigações pelo desenvolvimento do conhecimento matemático e pela conversão entre os conhecimentos matemáticos tácito e explícito, a partir de situações oriundas, preferencialmente, de suas realidades (Rosa & Orey, 2012).

Conforme esse contexto, Barros (2011) utilizou a Modelagem Matemática como um instrumento para a aprendizagem de conteúdos geométricos, pois esse estudo objetivou, a partir dos conceitos geométricos, o desenvolvimento de uma compreensão da realidade em que os alunos estavam inseridos, e que está relacionada com a relevância da Geometria para a humanidade, bem como a sua presença nas atividades cotidianas.

Desse modo, Rosa (2010) destaca que a conexão entre os conhecimentos tácitos e explícitos é importante para mostrar holisticamente a relevância de estudar o conhecimento matemático desenvolvido localmente para que se possa obter um amplo entendimento da aplicação de conteúdos matemáticos no cotidiano.

Assim, de acordo com Rosa e Orey (2012), o conhecimento tácito está embebido na experiência pessoal, é subjetivo, contextualizado e análogo. Por exemplo, um indivíduo não aprende a andar de bicicleta lendo um manual, pois necessita da experimentação pessoal e da prática para adquirir as habilidades necessárias para o aprendizado dessa ação.

Por conseguinte, o conhecimento tácito é adquirido e acumulado na vivência individual, pois envolve fatores intangíveis como crenças, perspectivas, percepções, sistemas de valores, ideias, emoções, normas e regras, comportamentos, pressentimentos e intuições (Rosa & Orey, 2012).

Nesse contexto, o conhecimento explícito é sistematicamente transmitido, comunicado e compartilhado entre os membros de um determinado grupo cultural, pois pode ser expresso por meio de palavras, números, dados, fórmulas matemáticas, relatórios e procedimentos codificados. Esse tipo de conhecimento é formalizado por meio de conceitos, textos, desenhos e diagramas; podendo ser articulado na linguagem formal por meio das sentenças gramaticais e das expressões matemáticas (Rosa & Orey, 2012).

De acordo com Moretto (2003), esse ambiente de aprendizagem tem como objetivo preparar os alunos para se comportarem como geradores da informação e não como meros acumuladores de dados, posicionando-se de maneira crítica e reflexiva na sociedade, que pode ser considerada como o desenvolvimento de uma perspectiva crítica da Modelagem.

Nesse contexto, destaca-se que o termo Sociocrítica foi sugerido por Barbosa (2003) para denominar a perspectiva da Modelagem Matemática que tem por objetivo oportunizar para os alunos uma discussão sobre o papel e a natureza dos modelos matemáticos na sociedade. Então, a perspectiva sociocrítica compreende a Modelagem como a utilização da Matemática para investigarem situações-problema que estejam atreladas à sua realidade.

Para Rosa e Orey (2012), a Modelagem Matemática pode ser considerada como um

ambiente de aprendizagem que possibilita a construção e a difusão do conhecimento matemático por meio da utilização de saberes e fazeres matemáticos: explícito e tácito, que interagem nesse ambiente. Nesse contexto, os membros de grupos culturais distintos desenvolveram e desenvolvem maneiras diferentes de *fazer* matemática para que possam entender e compreender os ambientes: cultural, social, político, econômico e natural de seu entorno, cujas práticas matemáticas que se originam nesses contextos.

Consequentemente, a Modelagem é um ambiente de aprendizagem que possibilita aos alunos a problematização no que se refere ao ato de criar perguntas e/ou questões com referência às situações-problema investigadas por meio da busca, seleção, organização, manipulação de informações, matematizações e reflexões críticas sobre a própria realidade (Barbosa, 2004).

Dessa maneira, para D'Ambrosio (1990), os membros dos grupos culturais distintos têm desenvolvido, no decorrer da história, maneiras distintas para matematizar a própria realidade com a utilização de elementos de próprio do processo de Modelagem.

Portanto, Rosa e Orey (2010) afirmam que a abordagem sociocultural da Modelagem possibilita que os membros de diferentes grupos culturais esquematizem, formulem e visualizem situações-problema de maneiras diferenciadas, transferindo-as do mundo real para a conceituação matemática por meio da matematização.

Consequentemente, para Rosa e Orey (2006), a matematização é o processo por meio do qual os membros desses grupos utilizam diferentes ferramentas matemáticas para auxiliá-los a organizar, analisar, compreender, entender, modelar, inferir e resolver as situações-problema enfrentadas em seu cotidiano.

Conforme esse contexto, Rosa (2010) afirma que a perspectiva sociocultural/crítica da Modelagem Matemática busca refletir criticamente sobre os pressupostos da Matemática formalista, por meio da qual as “deduções [matemáticas] são cadeias de transformações de expressões simbólicas segundo regras explícitas de manipulação de símbolos” (Silva, 2007, p. 184). Esse formalismo mostra a Matemática como um conjunto de regras com uma linguagem unidimensional e sem significados.

Por conseguinte, Rosa (2010) argumenta que é necessário discutir sobre os diferentes contextos sociais, culturais e econômicos presentes em sala de aula, abordando um debate crítico e reflexivo sobre o papel da Matemática na sociedade e as consequências de sua utilização na resolução das situações-problema enfrentadas no cotidiano por meio da perspectiva sociocultural/crítica da Modelagem Matemática.

Nesse direcionamento, Rosa (2010) argumenta que é necessário que o processo de ensino e aprendizagem em Matemática envolva o estudo de situações-problema que retratam a realidade dos alunos, gerando a compreensão dos conteúdos matemáticos e geométricos estudados que não estejam desvinculados de sua vida diária.

Existe, de acordo com D'Ambrosio (1990), a necessidade de que os membros de grupos culturais distintos assumam uma postura sociocrítica em relação aos problemas enfrentados em sua vida diária para que os alunos possam desenvolver a sua capacidade de avaliação e de tomada de decisões.

Similarmente, Rosa (2016) afirma que essa postura é considerada como uma transformação sociocultural que envolve a análise sociocrítica dos fenômenos social, político, econômico, ambiental e cultural, pois reconhece que a Matemática pode ser considerada como um instrumento democrático/político que possibilita questionar os fenômenos que ocorrem diariamente.

### **Etnomatemática e os Aspectos Culturais da Matemática**

A Etnomatemática surgiu na década de 1970, com base em críticas de estudiosos sobre o processo de ensino e aprendizagem tradicional em Matemática. Em contraposição ao ensino tradicional, a Etnomatemática propõe a condução de pesquisas e estudos que se direcionam para o entendimento da percepção e análise dos processos de origem, transmissão, difusão e institucionalização do conhecimento matemático proveniente de diversos grupos culturais (D'Ambrosio, 1990).

Portanto, a Etnomatemática pode ser considerada como o conhecimento matemático espontâneo que é desenvolvido pelos membros de grupos culturais distintos, que são motivados para encontrarem soluções próprias para entenderem os fenômenos presentes nos contextos: ambiental, social, político, econômico e cultural (Rosa, 2010).

Nesse contexto, D'Ambrosio (1990) afirma que o termo Etnomatemática é composto por 3 (três) radicais gregos: *etno+matema+tica*, que pode ser entendido como a arte de explicar, entender e desempenhar na realidade (*matema*), dentro de um contexto cultural próprio (*etno*), pois todas as culturas e povos desenvolveram maneiras próprias denominadas de técnicas (*ticas*) para explicar, conhecer e modificar as suas realidades, que está em constante evolução. Desse modo, D'Ambrosio (1993), enfatiza que o:

(...) enfoque da etnomatemática para a matemática, é de implementar a sua utilização nas escolas, proporcionando aos alunos uma vivência que somente faça sentido se eles estiverem em seu ambiente natural e cultural; criar situações variadas que possam

despertar e aguçar o interesse e a curiosidade que os alunos possuem naturalmente, para tornar a matemática agradável de ser aprendida, tendo como objetivo conectar a matemática ensinada nas escolas com a matemática presente em seus cotidianos (p. 27).

Conforme essa asserção, destaca-se que, para D'Ambrosio (2002), a Etnomatemática possui várias dimensões interligadas, sendo que, para efeito didático, essas dimensões são denominadas de: dimensão conceitual, dimensão histórica, dimensão cognitiva, dimensão epistemológica, dimensão política e dimensão educacional.

Então, existe a necessidade de compreender que o conhecimento matemático se origina das práticas culturais que estão enraizadas nas relações sociais. Esse ponto de vista possibilita a exploração de ideias matemáticas distintas por meio da valorização e do respeito aos conhecimentos adquiridos quando os membros desses grupos interagem com o próprio ambiente e/ou com os membros de outros grupos culturais (Rosa & Orey, 2003).

De acordo com Rosa e Orey (2003), a Etnomatemática pode ser caracterizada como uma forma de entendimento do pensamento matemático dos grupos culturais a Modelagem atua como uma ferramenta importante para que os indivíduos possam atuar e agir no mundo. Por exemplo, D'Ambrosio (2004) afirma que o programa Etnomatemática não se:

(...) esgota no entender o conhecimento [saber e fazer] matemático das culturas periféricas. (...). Naturalmente, no encontro de culturas há uma importante dinâmica de adaptação e reformulação acompanhando todo esse ciclo, inclusive a dinâmica cultural de grupos de indivíduos (p. 45).

Conforme essa asserção, Rosa (2010) destaca que a sala de aula pode ser considerada como um espaço democrático e sociocultural que possibilita o entendimento das dinâmicas dos *saberes e fazeres* matemáticos fundamentados na realidade da comunidade escolar.

### **Materiais Manipulativos e Ludicidade**

Os materiais manipulativos e concretos são recursos didáticos que podem ser utilizados pelos professores nas salas de aula no processo de ensino e aprendizagem em Matemática. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), um dos princípios norteadores do processo de ensino e aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental é a utilização dos recursos didáticos numa perspectiva problematizadora. Assim, os:

(...) recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão (Brasil, 1998, p. 57).

De acordo com Cavalcanti (2006), o material concreto pode ser considerado como um ente qualquer que pode ser manipulado com o objetivo da descoberta de padrões e conceitos matemáticos. Esses materiais podem ser de ordem natural ou artificial. Por exemplo, o material concreto natural é aquele que existe espontaneamente, sendo gerado pela ação da natureza, como, por exemplo, uma pedra, uma flor ou uma fruta.

Por outro lado, o material concreto artificial é gerado pela produção da humanidade, como, por exemplo, um lápis, uma folha, um pedaço de fio ou um cordão. Contudo, o material concreto pode assumir um caráter didático caso seja utilizado como um fim específico para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem em salas de aula (Cavalcanti, 2006).

Para Turrioni e Perez (2006), o material concreto é importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático por meio de aulas experimentais, pois essa abordagem possibilita uma aprendizagem contextualizada e com significados para os alunos que podem relacionar a teoria com a prática por meio de sua manipulação.

Por exemplo, Orey e Rosa (2004) afirmam que uma maneira de se entender a utilização de materiais manipulativos é por meio de seu aspecto lúdico, que promove o interesse dos alunos pela própria manipulação desses materiais, motivando-os a conhecerem os seus limites e as suas possibilidades de desenvolvimento do conhecimento matemático de um modo lúdico.

Dessa maneira, a utilização de materiais manipulativos em salas de aula, na perspectiva etnomatemática, auxilia no desenvolvimento dos raciocínios lógico e geométrico, bem como na elaboração de estratégias para resolução de problemas, que são habilidades que os alunos podem adquirir durante o processo manipulativo desses materiais, bem como apropriar-se de suas raízes culturais, respeitando-as e valorizando-as em diferentes contextos (Rosa, & Orey, 2017).

Os materiais manipulativos são aqueles que os alunos conseguem sentir, tocar, manipular e movimentar, podendo ser objetos reais que têm aplicação no cotidiano ou que são utilizados para representar uma determinada ideia (Matos & Serrazina, 1996), que possibilitam o desenvolvimento de ações pedagógicas em salas de aula para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática (Rosa & Orey, 2017).

Assim, em sua utilização didática e pedagógica, Rosa (2010) afirma que os materiais manipulativos podem ser admitidos como mediadores da aprendizagem de diversos temas de Geometria, como, por exemplo, para o reconhecimento de conceitos, como um instrumental

para a tomada de decisão, bem como para a compreensão de elementos da geometria plana e espacial para a elaboração, construção e manipulação de sólidos geométricos. Desse modo, o:

(...) manuseio de materiais concretos, por um lado, permite aos alunos experiências físicas à medida que este tem contado direto com os materiais, ora realizando medições, ora descrevendo, ou comparando com outros de mesma natureza. Por outro lado, permite-lhe também experiências lógicas por meio das diferentes formas de representação que possibilitam abstrações empíricas e abstrações reflexivas, podendo evoluir para generalizações mais complexas (Sarmiento, 2010, p. 3).

Nessa asserção, Rosa e Orey (2017) argumentam sobre a importância da utilização de materiais manipulativos pelos alunos em salas de aula, que podem ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos e geométricos com a elaboração de atividades lúdicas em uma perspectiva etnomatemática.

Conforme esse contexto, este artigo objetiva verificar como a utilização lúdica do Cubo Mágico como um recurso mediador pode auxiliar no desenvolvimento de conteúdos da Geometria Euclidiana referentes aos conceitos relacionados com a geometria plana e espacial em sala de aula.

Esses conteúdos envolvem os conceitos intuitivos como a área, o perímetro de figuras planas e o volume de sólidos geométricos para alunos matriculados em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, numa perspectiva etnomatemática com relação à utilização do Cubo Mágico no desenvolvimento dessa ação pedagógica.

De acordo com o seu desenvolvimento histórico, há um reconhecimento de que o *Cubo Mágico*, em seu formato atual, foi inventado, em 1974 pelo arquiteto húngaro Erno Rubik, sendo considerado como um quebra-cabeça tridimensional. Na década de 1980, o cubo mágico tornou-se conhecido, sendo que foi difundido e comercializado mundialmente pela empresa *Ideal Toys* com a denominação de *Cubo de Rubik* (EBC, 2014)<sup>1</sup>.

De acordo com Barbosa (2018), o cubo mágico, como inicialmente denominado por seu criador, também ficou conhecido no Brasil, em 1980, por esse nome, sendo comercializado nacionalmente com sucesso, principalmente, pelo desafio em resolvê-lo. No entanto, desde quando foi criado em 1974, o cubo mágico teve alterações em seu formato, que se desenvolveu e evoluiu com o decorrer do tempo.

Por exemplo, Barbosa (2018) comenta que Rubik utilizou, sem sucesso, elásticos para sustentar as 26 peças do cubo mágico, pois somente conseguiu construir essa peça quando esculpiu cada um de seus componentes com o objetivo de que os seus encaixes sustentassem

---

<sup>1</sup> Portal EBC-Doodle celebra os 40 anos da invenção do Cubo de Rubick: o famoso cubo mágico. Brasília, DF: Empresa Brasileira de Comunicação, 2014. Disponível em: <http://www.ebc.com.br/tecnologia/2014/05/doodle-celebra-os-40-anos-do-cubo-de-rubick-o-famoso-cubo-magico>. Acesso em: 13 de outubro de 2022.

a estrutura do cubo sem deformá-lo de uma maneira independente do giro de cada uma de suas faces.

Por outro lado, para se tornar um brinquedo difundido e conhecido mundialmente, o Cubo Mágico precisava de projeção internacional, sendo necessário exportá-lo da Hungria para outros países. Então, os matemáticos e educadores matemáticos divulgaram o cubo mágico em conferências internacionais e, também, por meio de um empresário húngaro que divulgou esse jogo em uma feira de brinquedos em Nuremberg, na Alemanha, em 1979 (Roncolli, 2016).

Nesse direcionamento, Roncolli (2016) afirma que Tom Kremer, um especialista em brinquedos, vendeu os cubos mágicos mundialmente, tornando-o um dos brinquedos mais populares do mundo na década de 1980. Contudo, inicialmente, a intenção da criação do cubo mágico era o desenvolvimento de uma peça que fosse geometricamente perfeita, para auxiliar na ilustração do conceito de dimensão do espaço aos seus alunos de arquitetura.

Similarmente, para Oliveira, Parreira e Silva (2017), a princípio, a finalidade do Cubo Mágico era ensinar conteúdos geométricos para os alunos para que pudessem compreender os conceitos básicos desse assunto, como, por exemplo, a quantidade de faces de um cubo. Assim, a criação do Cubo Mágico pode estar relacionada com a educação escolar no que tange ao processo de ensino e aprendizagem, pois enquanto instrumento lúdico, esse jogo desperta o interesse dos alunos há várias gerações.

Nesse contexto, a principal característica do Cubo Mágico é ter cada uma de suas seis faces pintadas com uma cor diferente, podendo ser confeccionado em madeira ou plástico, possuindo várias versões, sendo a mais comum:  $3 \times 3 \times 3$ , onde cada face é dividida em 9 quadrados.

Nessa perspectiva, Rosa e Orey (2017) argumentam que um aspecto importante da utilização de materiais manipulativos nas aulas de Matemática está relacionado com as possibilidades que a sua ludicidade oferece para aproximar os alunos do conhecimento matemático e geométrico com a utilização das perspectivas etnomatemática.

### **Aspectos Metodológicos**

Esta pesquisa tem uma abordagem qualitativa que visa contribuir para um melhor entendimento de sua problemática. Dessa maneira, os procedimentos metodológicos estão relacionados com a obtenção dos dados coletados mediante o contato interativo dos pesquisadores com os seus participantes. Nessa abordagem, Patton (2002) afirma que os

pesquisadores podem se aprofundar no entendimento dos fenômenos estudados em suas investigações.

Nesta pesquisa, o primeiro autor utilizou a Perspectiva Sociocultural/crítica da Modelagem Matemática, fundamentada na Etnomatemática, como uma ação pedagógica para uma compreensão ampla dos conteúdos matemáticos e geométricos, com uma turma de 5 alunos matriculados no 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular localizada na Região Imediata de João Monlevade, em Minas Gerais.

O principal objetivo desse estudo foi propor o desenvolvimento de conteúdos relacionados com a Geometria plana e espacial de uma maneira diferenciada, procurando formular modelos que pudessem propiciar uma aprendizagem com significado, contextualizada e transformadora, com base na utilização da ludicidade do Cubo Mágico, que se contrapõe ao modelo pedagógico tradicional de ensino que é, geralmente, utilizado nas escolas (Lopes, 2021).

Inicialmente, essa pesquisa seria desenvolvida com uma turma composta por 20 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, com idade de 10 anos a 12 anos. Entretanto, sendo que devido ao cenário provocado pela pandemia da COVID-19, entre 2020 e 2022, o ano de escolaridade proposto para a realização dessa investigação foi alterado, visando possibilitar a condução do trabalho de campo proposto nesse estudo.

Desse modo, o foco desta pesquisa foi modificado para ser conduzido com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, com idade entre 10 e 13 anos, haja vista que em virtude das aulas remotas realizadas durante o ano de 2020, esses estudantes tiveram o seu aprendizado em conteúdos geométricos comprometido e dificultado de acordo com o próprio relato de seus pais e/ou responsáveis.

Após a realização de uma reunião via *WhatsApp* com os pais e/ou responsáveis, dentre os 10 possíveis alunos convidados para participarem desta pesquisa, 5 (cinco) deles foram selecionados, pois atenderam aos critérios pré-estabelecidos (possuir internet, celular e câmera), bem como demonstraram interesse na aprendizagem de conteúdos geométricos por meio de sua participação nessa investigação, cujas atividades foram realizadas na modalidade remota emergencial via *GoogleMeet*.

É importante destacar que, tendo em vista que a pesquisa tem uma abordagem qualitativa, a utilização da amostragem probabilística não foi utilizada para o recrutamento dos alunos para a condução deste estudo. Destaca-se que a realização deste estudo foi aprovada pelos *Comitê de Ética em Pesquisa (CEP)*, da Universidade Federal de Ouro Preto.

## **Teoria Fundamentada nos Dados como um *Design* Metodológico Adaptado**

A Teoria Fundamentada nos Dados é um *design* metodológico por meio do qual os dados são sistematicamente coletados e analisados (Goulding, 2001). Desse modo, a

Teoria Fundamentada nos Dados foi proposta por Glaser e Strauss (1967) com um propósito, inicial, de prover um modelo de pesquisa que buscasse nos dados produzidos uma teorização acerca de determinados fenômenos, cujos primeiros passos foram dados na área das Ciências Biológicas (Almeida & Chiari, 2018, p. 3).

Essa teoria é composta por duas perspectivas que se relacionam mutuamente, como, por exemplo, uma com base teórica construtivista de Charmaz (2009) e a outra que possui um enfoque qualitativo, que foi desenvolvido, inicialmente, por Glaser e Strauss (1967) e Glaser (1978), sendo ampliada, posteriormente, por Corbin e Strauss (1990). Assim, destaca-se que:

Essa metodologia capta a diversidade de fatos, dados, informações, experiências da realidade, além da multidimensionalidade e a multi-causalidade dos fenômenos. Além disso, preenche possíveis lacunas que podem surgir entre a teoria e a pesquisa empírica, pois propõe um conjunto de princípios e práticas/diretrizes básicas, como a codificação, a redação de memorandos e a amostragem, orientando o pesquisador nas etapas do processo<sup>2</sup> de pesquisa, bem como o caminho a ser percorrido para a descoberta da teoria (Prigol & Behrens, 2018, p. 2).

A Teoria Fundamentada nos Dados (TFD) é de natureza exploratória, pois os pesquisadores se ambientam com a problemática proposta, estando relacionados de maneira direta com o fenômeno que é o objeto de estudo, visando explicitá-lo por meio do aprimoramento das ideias constantes nos dados e da obtenção de informações para o desenvolvimento de uma investigação completa.

Por conseguinte, os autores deste artigo adaptaram a Teoria Fundamentada nos Dados, pois a redação da teoria emergente por meio da utilização da codificação seletiva está desvinculada dos objetivos propostos para esse estudo, que é a busca de uma resposta para a questão de investigação deste estudo: *Como a ludicidade do material manipulativo Cubo Mágico como um recurso mediador pode contribuir para o desenvolvimento de conteúdos da Geometria Euclidiana (plana e espacial) por meio da dimensão sociocrítica da Modelagem Matemática para os alunos do 7o ano do Ensino Fundamental?*

A TFD se fundamenta no princípio relacionado com o desenvolvimento da amostragem teórica, da codificação dos dados e da elaboração das categorias conceituais com base nos códigos preliminares que foram identificados na codificação aberta. Os instrumentos

---

<sup>2</sup> Processo: constituído por sequências temporais reveladas que podem apresentar limites identificáveis, com inícios e fins claros e marcas mútuas de referências (Charmaz, 2009).

metodológicos de coleta de dados utilizados nesse estudo foram: dois questionários (inicial e final), o diário de campo do professor-pesquisador e os blocos de atividades do registro documental.

Os questionários podem ser definidos como instrumentos utilizados em pesquisas, que têm possibilidades relevantes para a obtenção de uma gama de informações de modo sistematizado e padronizado. A utilização desse instrumento possibilita a obtenção de informações diversas acerca dos participantes das pesquisas.

A flexibilidade é uma das características mais importantes dos questionários, pois possibilitam a coleta de ambos os dados qualitativos e quantitativos (ROSA, 2010). Assim, antes da realização dos blocos de atividades, um questionário inicial foi respondido com o objetivo de traçar o perfil geral dos participantes desta pesquisa.

O questionário final foi aplicado para os participantes após a finalização dos blocos de atividades do registro documental. O principal objetivo desse instrumento foi identificar a percepção dos alunos sobre a presença e aplicabilidade dos conceitos de Geometria Plana e Espacial nas atividades realizadas no cotidiano escolar.

Outro objetivo desse questionário foi constatar a contribuição da perspectiva Sociocultural/crítica da Modelagem Matemática fundamentada na Etnomatemática para o desenvolvimento de conteúdos relacionados com a Geometria plana e espacial, bem como verificar se houve indícios do desenvolvimento do raciocínio crítico e reflexivo dos alunos por meio da realização das atividades propostas nos blocos de atividades propostos para a condução do trabalho de campo deste estudo.

Os blocos de atividades foram compostos por documentos que possuem informações que auxiliam os pesquisadores na comunicação de suas decisões, bem como para registrarem os temas que são relevantes para os participantes da pesquisa e da instituição educacional (Leedy & Ormord, 2010). Conforme Rosa (2010), as informações escritas, os objetos, as situações-problema ou os fatos registrados materialmente são utilizados na fase de coleta de dados de um determinado estudo.

Nesta investigação, as atividades propostas para o seu registro documental foram compostas por 3 (três) blocos, cujos objetivos foram:

- a) Identificar como os participantes perceberam a presença da Matemática, em especial a Geometria Plana e Espacial no cotidiano escolar.
- b) Verificar se os participantes entenderam os conceitos geométricos propostos durante as atividades que foram realizadas em sala de aula.

- c) Contribuir para a formação dos participantes proporcionando-lhes o desenvolvimento da cidadania, da consciência crítica, da criatividade, da coletividade e da reflexão.
- d) Verificar se as atividades elaboradas sob a perspectiva sociocrítica da Modelagem Matemática contribuíram para o desenvolvimento dos participantes com relação aos conteúdos da Geometria plana e espacial.

Assim, os 3 (três) blocos de atividades propostos no registro documental que foram realizados em sala de aula propiciaram os dados necessários para auxiliar o primeiro autor na análise das informações, na interpretação dos resultados e na obtenção de uma resposta para a questão de investigação proposta para esse estudo.

### **Atividade Proposta em Sala de Aula: A Situação-Problema da Caixa D'Água**

Uma das atividades propostas pelo primeiro autor estava relacionada com a questão: *Resolver uma situação-problema para a determinação do volume de um reservatório de água em formato de um cubo, cujas arestas medissem 40 metros.*

Para resolver essa situação-problema, 3 (três) participantes elaboraram um modelo matemático ao utilizarem, de modo implícito, a fórmula:  $V = a \cdot a \cdot a = a^3$ , para a determinação do volume dessa caixa d'água, ou seja,  $V = 40 \times 40 \times 40 = 64.000 \text{ m}^3$ . Por exemplo, a participante *F4* respondeu que o “volume da caixa d'água é  $40 \times 40 \times 40 = 64.000 \text{ m}^3$ ”.

Esses participantes também responderam que a capacidade desse reservatório é de 64 milhões de litros de água, contudo, é importante destacar que, durante a realização dessa atividade, esses participantes responderam que “para transformar em litros é só multiplicar por 1000”. Contudo, a participante *F2* complementou a sua resposta ao informar que “se fosse em decímetros cúbicos seria o próprio valor em litros”.

Continuando com a resolução dessa situação-problema, o primeiro autor discutiu com os participantes que essa prefeitura constatou que o reservatório de água precisaria ter as suas dimensões alteradas e, assim, os técnicos decidiram aumentar as arestas do reservatório de água para 60 metros. Desse modo, o professor-pesquisador solicitou que os participantes determinassem o novo volume e a nova capacidade desse reservatório, que estava contextualizada no conhecimento matemático presente na própria realidade.

Os resultados desse estudo mostraram que esses participantes também elaboraram um modelo matemático que estava implícito em sua resolução ao responderem que o “volume novo será de 216 mil metros cúbicos e que a capacidade nova será de 216 milhões de litros”.

Por exemplo, a participante *F4* elaborou um modelo matemático para determinar que, após a alteração das arestas do reservatório de água, o “novo volume será de  $60 \times 60 \times 60 = 216.000 m^3$  e que a nova capacidade será de  $216.000 \times 1000 = 216.000.000$  litros”.

Do ponto de vista da Etnomatemática, Rosa (2010) afirma que um de seus principais pressupostos está relacionado com as ações pedagógicas propostas em sala de aula que possibilitam a identificação de um *saber/fazer* que os alunos adquirem em sua vida diária e que interagem com outros conhecimentos matemáticos aprendidos na escola.

Assim, no contexto dessa atividade, os alunos utilizaram o conhecimento tácito como um ponto de partida para resolver a situação-problema proposta na perspectiva sociocultural da Modelagem Matemática, possibilitando o seu envolvimento com atividades curriculares contextualizadas no cotidiano da comunidade escolar.

## **Resultados e Discussões**

As resoluções dessa situações-problema evidenciaram que a utilização da visualização direcionou os alunos para o desenvolvimento do processo de matematização dos conceitos matemáticos por meio da perspectiva sociocultural/crítica da Modelagem Matemática.

Desse modo, Rosa e Orey (2006) afirmam que a matematização é o processo por meio do qual os membros de grupos culturais distintos utilizam diferentes ferramentas matemáticas para auxiliá-los a organizar, analisar, compreender, entender, modelar e resolver problemas enfrentados no cotidiano com a utilização de procedimentos lúdicos por meio da utilização do Cubo Mágico.

Nesse contexto, Lopes (2021) destaca que o manuseio de materiais manipulativos possibilita que alunos participem de experiências cinestésicas à medida que tenham contado direto com esses artefatos, promovendo o desenvolvimento do pensamento lógico por meio de experiências cotidianas que podem ser representadas de maneiras diversas ao viabilizar abstrações empíricas e reflexivas, podendo evoluir para generalizações mais complexas conforme as situações vivenciadas na vida diária.

Assim, essas ferramentas possibilitaram a identificação e a descrição de ideias, procedimentos e práticas matemáticas específicas do contexto cultural desses alunos, que os auxiliaram no entendimento das relações e regularidades, na esquematização, na formulação e na visualização de situações-problema de maneiras diferenciadas, transferindo-as do mundo real para a conceituação e a abstração matemática por meio da ludicidade do Cubo Mágico (Lopes, 2021).

No contexto hídrico, as respostas dadas para as atividades propostas durante a condução do trabalho de campo desse estudo, possibilitaram a inferência de que esses alunos consideram importante a economia de água por meio de sua utilização consciente pela população. Por exemplo, o participante *MI* comentou sobre a importância de economizar água ao “fechar as torneiras e tomar banhos mais rápidos” enquanto a participante *F4* afirmou que “se as pessoas não mudarem os seus comportamentos, vai ficar difícil ter água até para beber”.

Desse modo, para Orey e Rosa (2007), a perspectiva sociocultural/crítica da Modelagem enfatiza que existe a necessidade da proposição de um processo de ensino e aprendizagem em Matemática direcionado para o desenvolvimento da *eficiência sociocrítica* dos alunos, cujo objetivo é a sua transformação em cidadãos “flexíveis, adaptáveis, reflexivos, críticos e criativos” (p. 201).

Posteriormente, esses alunos explicaram que os conhecimentos matemáticos podem auxiliá-los no cálculo da diminuição do consumo de água em sua casa, visando a economia da água e a redução do valor da conta a ser paga mensalmente. Por exemplo, a participante *F4* afirmou que o conhecimento matemático “pode auxiliar a fazer contas do consumo da casa. Lá em casa minha mãe calcula no caderno dela os valores das contas para economizar”.

Os resultados obtidos nessa atividade mostraram que esses alunos perceberam a presença de conhecimentos matemáticos em algumas situações cotidianas. Por exemplo, a participante *F2* comentou que a “Matemática pode nos ajudar em vários momentos como ajudar a saber se o salário é suficiente para pagar as contas, para somar os valores dos produtos no supermercado”.

Desse modo, conforme a perspectiva etnomatemática, a ludicidade do material manipulativo do Cubo mágico promove, de acordo com Rosa e Orey (2017), um aspecto importante da utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática está relacionado com as possibilidades que a sua ludicidade oferece para aproximar os alunos do conhecimento matemático e geométrico conforme a perspectiva etnomatemática.

Em seguida, o primeiro autor questionou se os conhecimentos matemáticos poderiam auxiliar a verificar se uma família está gastando água e energia elétrica em demasia em sua casa, sendo que esses alunos responderam afirmativamente essa questão. Por exemplo, a participante *F4* comentou que a “Matemática ajuda pois se a conta vem cara é porque tá usando muita água e luz” enquanto a participante *F2* destacou que “se a conta der valor alto é porque as pessoas precisam economizar no próximo mês”.

Assim, Rosa e Orey (20017) destacam a importância de que o processo de ensino e aprendizagem em Matemática seja direcionado para o desenvolvimento da *eficiência sociocrítica* dos alunos, que tem como objetivo prepará-los para uma participação ativa na sociedade, bem como para o exercício pleno da cidadania ao auxiliá-los na busca de soluções práticas para as situações-problema que enfrentam em seu cotidiano e que estão contextualizadas na perspectiva etnomatemática.

### **Considerações Finais**

Os professores, educadores e alunos estão imersos num mundo repleto de formas por meio do qual as ideias, as noções, as propriedades e as figuras geométricas estão presentes na natureza, nas artes, na arquitetura ou em outras áreas do conhecimento. Assim, a Geometria é constituída como um dos conteúdos estruturantes da Educação Básica, pois no ambiente escolar, esses profissionais trabalham com os conceitos de espaço, de formas e de medições.

Nesse contexto, é importante destacar que o processo de ensino e aprendizagem em Matemática se reveste de maior significado quando os alunos se envolvem em atividades que são elaboradas para priorizar o seu protagonismo na aquisição de conceitos que possibilitam o desenvolvimento da construção de conhecimentos geométricos (Lorenzato, 2006).

Assim, Nacarato e Passos (2003) afirmam que o trabalho docente pode desencadear diferentes raciocínios dos alunos, que possibilitam a sua transformação em elementos importantes para a construção do pensamento geométrico, contudo, essas intervenções educacionais requerem um saber disciplinar pedagógico e curricular da Geometria pelos professores para o desenvolvimento dessa ação pedagógica em salas de aula.

Esse estudo buscou mostrar como a ludicidade do material manipulativo Cubo Mágico como um recurso mediador poderia auxiliar os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental no desenvolvimento de conteúdos da Geometria Euclidiana (plana e espacial) por meio da dimensão sociocrítica da Modelagem Matemática para que os participantes pudessem desenvolver a sua percepção espacial e a visualização, que são habilidades importantes que possibilitam a conexão da Geometria com outras áreas do conhecimento.

Dessa maneira, é de suma importância que os alunos realizem as suas atividades geométricas experimentais com a utilização de materiais manipulativos na perspectiva sociocultural/crítica da Modelagem, para que possam utilizar esses conceitos geométricos que são elaborados em outros contextos, bem como em outros momentos no decorrer de sua aprendizagem conforme a perspectiva da Etnomatemática.

Por conseguinte, os materiais manipulativos, como, por exemplo, o Cubo Mágico, constituem importantes recursos pedagógicos mediadores que estão a serviço dos professores em salas de aula. Essa abordagem crítica, reflexiva e sociocultural possibilita que os professores tornem as aulas de Matemática mais dinâmicas, holísticas e compreensíveis, haja vista que possibilitam a aproximação da teoria com a prática por meio da ação manipulativa dos materiais concretos numa perspectiva etnomatemática contextualizada no cotidiano.

## Referências

- Almeida, H. R. F. L., & Chiari, A. S. S. (2018). *Teoria fundamentada nos dados e educação matemática*. Foz do Iguaçu, PR: SIPEQ.
- Barbosa, J. C. (2003). *Modelagem matemática e a perspectiva sociocrítica*. Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática – SIPEM. Santos, SP: SBEM.
- Barbosa, J. C. (2004). Modelagem matemática: O que é? Por que? Como? *Veritati*, 4, 73- 80.
- Barbosa F. V. (2018). *O cubo mágico de Rubik: teoria, prática e arte*. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Departamento de Matemática. Brasília, DF: Universidade de Brasília.
- Barros, A. S. (2011). *Modelagem matemática como um instrumento de motivação facilitador da aprendizagem de geometria*. Especialização em Educação. Curso de Licenciatura em Matemática. Senhor do Bonfim, BA: Universidade do Estado da Bahia.
- Brasil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília, DF: MEC/Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
- Cavalcanti, L. B. (2006). *O uso de material concreto com representações retangulares na construção do conceito de decomposição multiplicativa*. Dissertação de Mestrado em Educação. Recife, PE: Universidade Federal de Pernambuco, 2006.
- Charmaz, K. (2009). *A construção da teoria fundamentada: guia prático para análise qualitativa*. 2ª Ed. Porto Alegre, RS: Artmed.
- Costa, E. A. S. (2013). *Analisando algumas potencialidades pedagógicas da história da matemática no ensino e aprendizagem da disciplina desenho geométrico por meio da teoria fundamentada*. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Departamento de Matemática. Ouro Preto, MG: Universidade Federal de Ouro Preto.
- D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer*. São Paulo, SP: Editora Ática.

- D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática: um programa. *A Educação Matemática em Revista*, 1(1), 5-11.
- D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Eves, H. (1992). *Introdução a história da matemática*. Campinas, SP: Ed. UNICAMP.
- Eves, H. (1997). *Geometria: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. Geometria, Tradução: Higino H. Domingues. São Paulo, SP: Atual.
- Filho, J. B. S., & Brito, K. L. V. (2006). *O aprendizado da geometria contextualizada no ensino médio*. Instituto de Ensino Superior de Goiás Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática, Formosa, GO: ESGO.
- Gerdes, P. (1992). *Sobre o despertar do pensamento geométrico*. Curitiba, PR: Editora da UFPR.
- Glaser, B., & Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory*. New York, NY: Aldene de Gruyter.
- Glaser, B. (1978). *Theoretical sensivity*. Mill Valley, CA: Sociology Press.
- Goulding, C. (2001). Grounded theory: a magical formula or a potential nightmare. *The Marketing Review*, 2(1), 21- 34.
- Leedy, P. D., & Ormrod, J. E. (2010). *Practical research: planning and design*. New Jersey, NJ: Pearson.
- Lopes, P. V. C. (2021). *Investigando o cubo mágico no desenvolvimento de conteúdos da Geometria Euclidiana para alunos do 7º ano do ensino fundamental por meio da perspectiva sociocrítica modelagem matemática*. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Departamento de Educação Matemática. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Ouro Preto, MG: Universidade Federal de Ouro Preto.
- Lorenzato, S. A. (2006). Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: Lorenzato, S. (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados.
- McLeish, J. (1991). *The story of numbers: how mathematics has shaped civilization*. New York, NY: Fawcett Columbine.
- Matos, J. M., & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa, Portugal: Universidade Aberta.

- Monteiro, C. E., Leitão, V., & Asseker, A. (2009). Ensinando matemática em contextos socioculturais de educação. *Horizontes*, 27(1), 69-78.
- Moretto, V. P. (2003). *Construtivismo: a produção do conhecimento em aula*. Rio de Janeiro, RJ: DP & A.
- Nacarato, A. M., & Passos, C. L. B. (2003). *A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores*. São Carlos, SP: EdUFSCar, 2003.
- Nacarato, A. M., Gonçalves, L. M. G. & Grando, R. C. (2008). Compartilhando saberes em geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. *Caderno Cedes*, 28(74), 39-56.
- Oliveira, J. M., Parreira, G. G., & Silva, L. D. (2017). O uso do cubo mágico como recurso pedagógico para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. *Anais do VI Encontro Goiano de Educação Matemática* (pp. 1-8). Urutaí, GO: IFGoiano.
- Orey, D. C., & Rosa, M. (2004). Ethnomathematics and the teaching and learning mathematics from a multicultural perspective. In Favilli, F. (Ed.). *Ethnomathematics and mathematics education* (pp. 139-148). Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education in Copenhagen, Denmark. Discussion Group 15, Ethnomathematics. Pisa, Italy: Tipografia Editrice Pisana.
- Orey, D. C., & Rosa, M. (2014). Goiabada com queijo: reflexões sobre a relação existente entre a etnomatemática e a modelagem. *Anais do Etnomat-RJ* (pp. 398-410). Niterói, RJ. Universidade Federal Fluminense (UFF).
- Passos, C. L. B., & Nacarato, A. M. (2014). O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da provinha Brasil. *Educação Matemática Pesquisa*, 16(4), 1147-1168.
- Patton, M. G. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. 3<sup>rd</sup> Edition. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Pavanello, R. M. (1989). *O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica*. Dissertação de Mestrado em Educação. Metodologia de Ensino. Faculdade de Educação. Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas.
- Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, 1(1), 7-17.
- Pelli D. (2014). *As contribuições do software geogebra como um mediador do processo de aprendizagem da geometria plana na educação a distância (EAD) em um curso de*

- licenciatura em pedagogia*. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Departamento de Matemática. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Ouro Preto, MG: Universidade Federal de Ouro Preto.
- Prigol, E. L., & Behrens, M. A. (2018). *Teoria fundamentada: metodologia aplicada na pesquisa em educação*. Curitiba, PR: PUCPR.
- Roncolli, G. A. (2016). *Cubo mágico: uma ferramenta pedagógica nas aulas de matemática*. Monografias de Curso de Licenciatura em Matemática. São João del Rei, MG: Universidade Federal de São João Del Rei.
- Rosa, M. (2010). *A mixed-methods study to understand the perceptions of high school leaders about English Language Learners (ELL) students: the case of mathematics*. Doctoral Dissertation. College of Education. Sacramento, CA: California State University, Sacramento (CSUS).
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2003). Vinho e queijo: etnomatemática e modelagem! *Bolema*, 16(20), 1-16.
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2004). *Etnomatemática como uma ação pedagógica*. Coleção Etnomatemática. 1ª Ed. Natal, RN: UFRN.
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delineando-se um caminho para a ação pedagógica. *Bolema*, 19(26), 19-48.
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2007). A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para eficiência sociocrítica. *Revista Horizontes*, 25(2), 197-206.
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2010). Ethnomodeling: a pedagogical action for uncovering ethnomathematical practices. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(3), 58-67.
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2012). O campo de pesquisa em etnomodelagem: as abordagensêmica, ética e dialética. *Educação e Pesquisa*, 38(4), 865-879.
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2014). Fragmentos históricos do programa etnomatemática. In: Nobre, S., Bertato, F., & Saraiva L. (Eds.). *Anais/Actas do 6º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática* (pp. 535-558). Natal, RN: SBHMat.
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2016). Pesquisa em investigações em etnomodelagem. *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-11). São Paulo, SP: SBEM.
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2017). *Influências etnomatemáticas em salas de aula: caminhando para a ação pedagógica*. Curitiba, PR: Appris Editora.

- Sarmiento, A. K. C. (2010). A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática. *Anais do 6º Encontro de Pesquisa em Educação* (pp. 1-12). Teresina, PI: Universidade Federal do Piauí.
- Silva, C. A. M. (2007). *Tecnologias da informação e comunicação na prática pedagógica de professores da área tecnológica de escolas técnicas: aprovação, resistência e indiferença*. Dissertação de Mestrado em Educação. Curitiba, PR: Universidade Estácio de Sá.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage Publications.
- Turrioni, A. M. S., & Perez, G. (2006). Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: Lorenzato, S. (Ed.). *Laboratório de ensino de matemática na formação de professores* (pp. 57-76). Campinas, SP: Autores Associados.